

4M5U3Th Trigonométrie - Théorie

P1a Le cercle trigonométrique

1 Introduction

- En 3^e année, la trigonométrie du triangle rectangle permet de définir les nombres trigonométriques d'un angle aigu uniquement via des rapports de longueurs.
- En 4^e année, on généralise les nombres trigonométriques des angles orientés en utilisant les angles au centre d'un cercle. On étudie également les relations trigonométriques dans un triangle quelconque.

2 Prérequis : Trigonométrie du triangle rectangle

Définition 1. NOMBRES TRIGONOMÉTRIQUES D'UN ANGLE AIGU

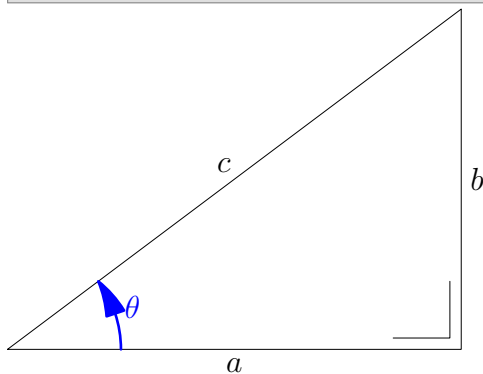
Dans un triangle rectangle ABC rectangle en C et dont l'angle $\widehat{B} = \theta$, nous pouvons définir les nombres trigonométriques de θ comme les différents rapports de longueurs.

$$a = |BC| ; b = |AC| ; c = |AB|$$

- | | | |
|-------------|-----------|--------------|
| • sinus | • cosinus | • tangente |
| • cosécante | • sécante | • cotangente |

$$\sin(\theta) = \frac{b}{c} ; \cos(\theta) = \frac{a}{c} ; \tan(\theta) = \frac{b}{a}$$

$$\csc(\theta) = \frac{c}{b} ; \sec(\theta) = \frac{c}{a} ; \cot(\theta) = \frac{a}{b}$$



$$0^\circ < \theta < 90^\circ$$

$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

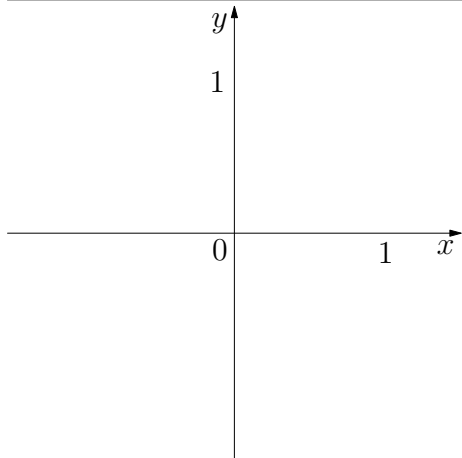
$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

3 Le cercle trigonométrique

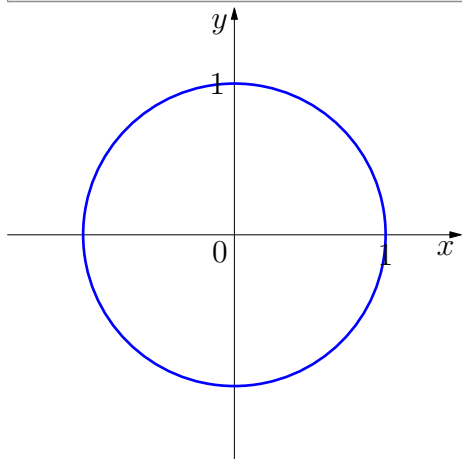
3.1 Le cercle

Définition 2. PLAN USUEL

Le plan usuel est le plan orienté (face supérieure et face inférieure définies) pointé (origine du repère fixée) muni de son repère orthonormé orienté positivement (sens lévogyre).

**Définition 3. CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE**

Dans le plan usuel muni de son repère orthonormé orienté positivement, le cercle trigonométrique est le cercle centré en l'origine du repère et de rayon 1.



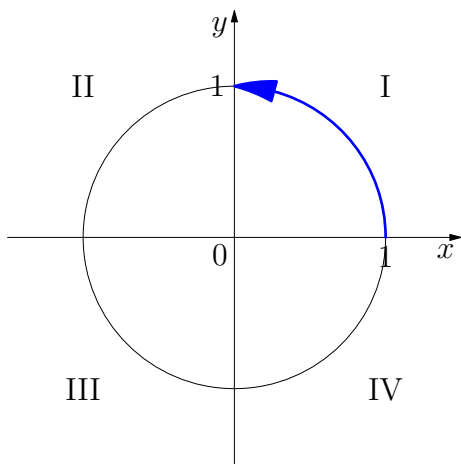
3.2 Angle et cercle trigonométrique

3.2.1 Représentation d'un angle sur le cercle

Pour représenter un angle sur le cercle, on tourne dans le sens trigonométrique. Les expressions suivantes sont des synonymes :

- le sens trigonométrique
- le sens conventionnel
- le sens positif
- le sens lévogyre
- le sens antihorlogique

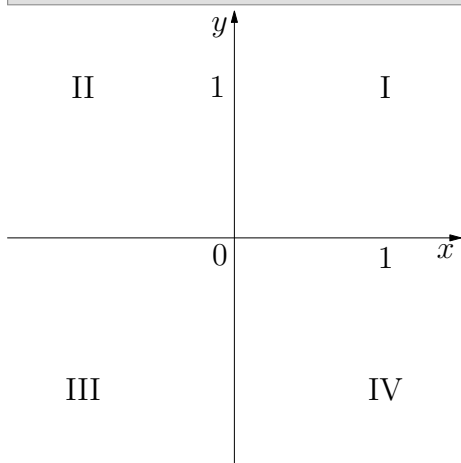
On tourne à partir de l'axe O_x vers l'axe O_y en commençant par le premier quadrant qui est la zone du plan où l'abscisse et l'ordonnée sont positives.



3.2.2 Quadrant

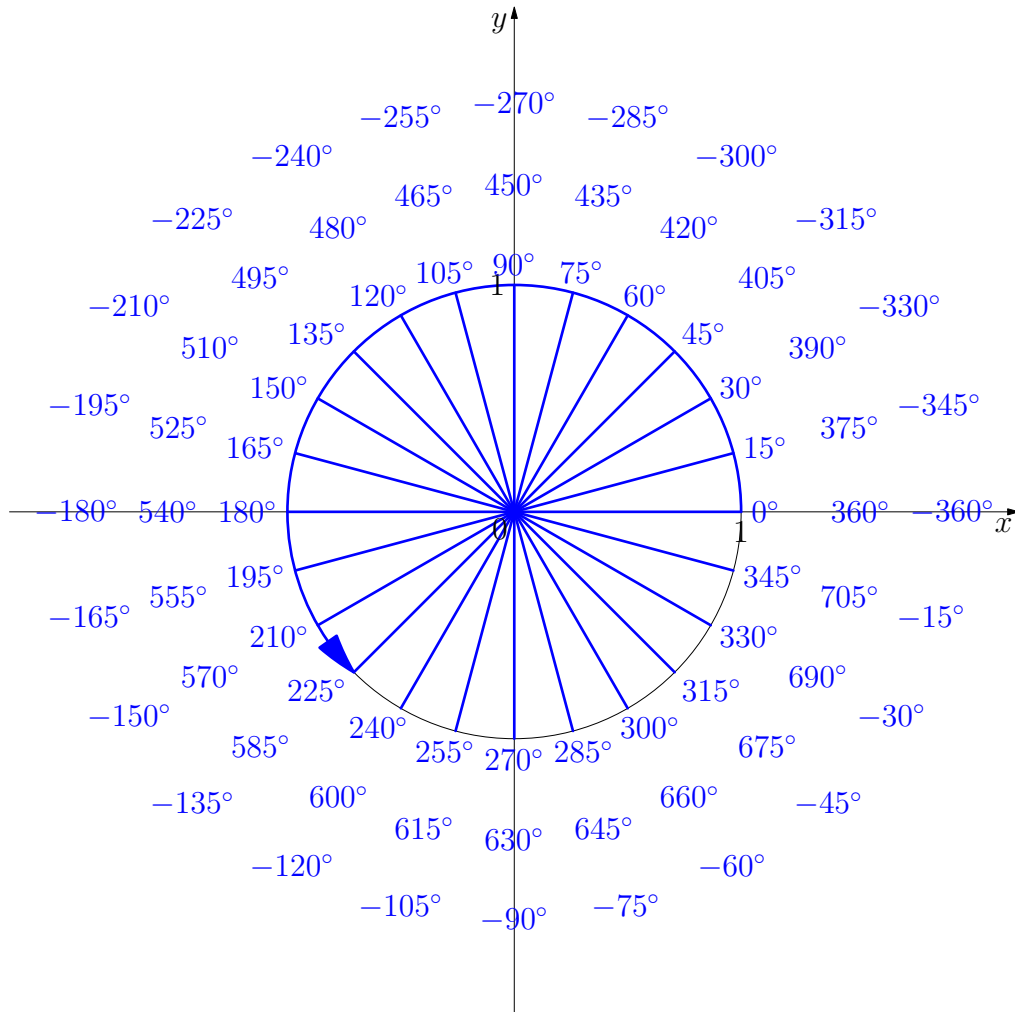
Définition 4. QUADRANT

Les axes du plan usuel délimitent 4 quadrants. Ils sont par convention numérotés en chiffres romains en tournant dans le sens trigonométrique à partir du premier quadrant correspondant aux angles aigus.



3.2.3 Point correspondant à un angle sur le cercle trigonométrique

- À chaque angle orienté, correspond un point sur le cercle trigonométrique.
- À chaque point sur le cercle trigonométrique, correspond une famille infinie d'angles orientés, séparés par un nombre entier de tours.



Par exemple le point correspondant à 225° correspond aussi à -135° ou encore à 585° . Plus généralement aux angles de la famille suivante :

$$\{225^\circ + k \cdot 360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

4 Les nombres trigonométriques

4.1 Définitions

Définition 5. COSINUS

Le cosinus d'un angle

- est l'abscisse du point correspondant à l'angle sur le cercle trigonométrique,
- c'est aussi l'abscisse de la projection orthogonale de ce point sur l'axe O_x des cosinus.

Définition 6. SINUS

Le sinus d'un angle

- est l'ordonnée du point correspondant à l'angle sur le cercle trigonométrique,
- c'est aussi l'ordonnée de la projection orthogonale de ce point sur l'axe O_y des sinus.

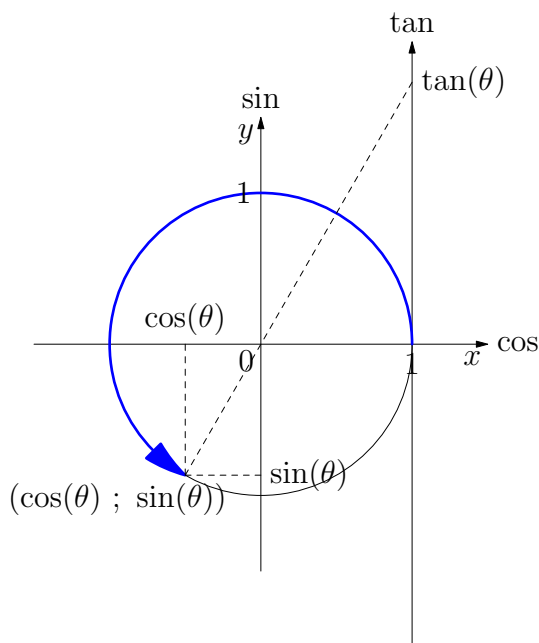
Définition 7. TANGENTE

La tangente d'un angle lorsqu'elle est définie

- est le rapport

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \quad \text{si défini}$$

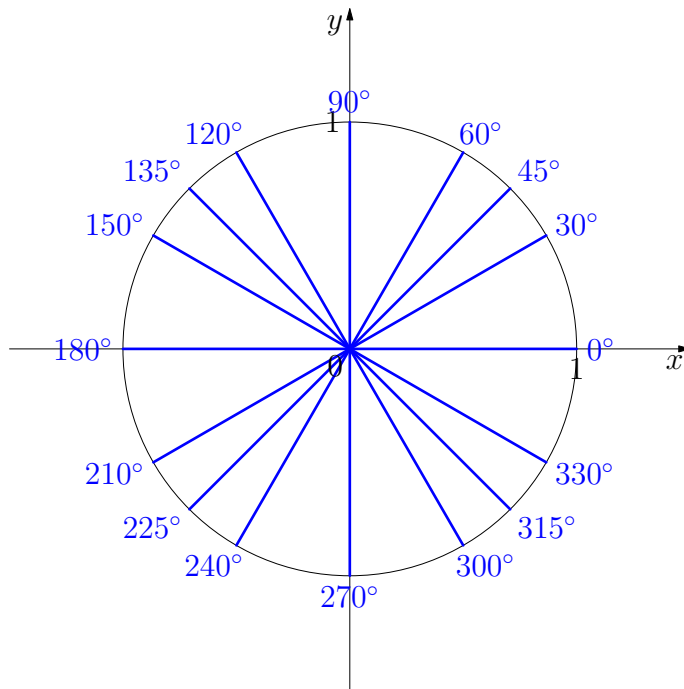
- c'est aussi l'ordonnée de la projection radiale du point correspondant à l'angle sur l'axe vertical d'équation $x = 1$ des tangentes.



4.2 Angles remarquables

x	0°	30°	45°	60°	90°	0°	90°	180°	270°
$\sin$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	1	0	-1
$\cos$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	0	-1	0
$\tan$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	0	$\nexists$	0	$\nexists$

$$\frac{1}{2} = 0,5 ; \frac{\sqrt{3}}{3} \simeq 0,58 ; \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0,71 ; \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0,87 ; \sqrt{3} \simeq 1,73$$



5 Les angles associés

- Formules fondamentales

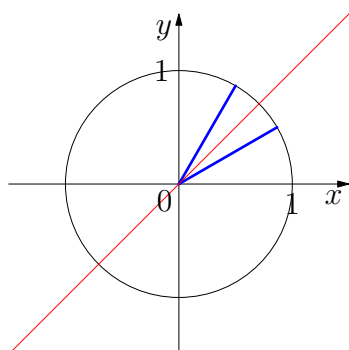
$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \quad \text{si défini}$$

- Angles complémentaires : $\alpha + \beta = 90^\circ \Leftrightarrow \beta = 90^\circ - \alpha \Leftrightarrow \alpha = 90^\circ - \beta$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin(\theta) \quad \text{et} \quad \sin(90^\circ - \theta) = \cos(\theta)$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan(\theta)} \quad \text{si définis}$$



- Autres angles associés (changement de quadrant)

- Angles supplémentaires : $\alpha + \beta = 180^\circ \Leftrightarrow \beta = 180^\circ - \alpha \Leftrightarrow \alpha = 180^\circ - \beta$

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos(\theta) \quad \text{et} \quad \boxed{\sin(180^\circ - \theta) = \sin(\theta)}$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan(\theta) \quad \text{si définis}$$

- Angles antisupplémentaires :

$$\beta - \alpha = \pm 180^\circ \Leftrightarrow \beta = \alpha \pm 180^\circ \Leftrightarrow \alpha = \beta \mp 180^\circ$$

$$\cos(\theta \pm 180^\circ) = -\cos(\theta) \quad \text{et} \quad \sin(\theta \pm 180^\circ) = -\sin(\theta)$$

$$\boxed{\tan(\theta \pm 180^\circ) = \tan(\theta)} \quad \text{si définis}$$

- Angles opposés : $\alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -\alpha \Leftrightarrow \alpha = -\beta$

$$\boxed{\cos(-\theta) = \cos(\theta)} \quad \text{et} \quad \sin(-\theta) = -\sin(\theta)$$

$$\tan(-\theta) = -\tan(\theta) \quad \text{si définis}$$

